EL NÚMERO Y LAS OPERACIONES
ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

Presentación

En los textos anteriores hemos desarrollado cómo se elaboran las **primeras nociones numéricas**. En cuanto a las Operaciones, vimos que

> "la función del número para **anticipar resultados**, también llamada **para calcular**, es la posibilidad que dan los números de anticipar resultados en situaciones no visibles, no presentes, aún no realizadas, pero sobre las cuales se posee cierta información. Esta función implica comprender que una cantidad puede resultar de la composición de varias cantidades y que se puede operar sobre números para prever el resultado de una transformación de la cardinalidad."[1]

En cuanto al aprendizaje de las **operaciones básicas**, "tanto en relación con los problemas aritméticos que resuelven como con las formas de calcular, en el Primer Ciclo, es esperable que los alumnos exploren los primeros significados de la suma, la resta, la multiplicación y la división de los números naturales y que calculen en forma exacta y aproximada con distintos procedimientos, apoyándose en un repertorio de cálculos memorizados."[2]

"Antes del trabajo con los algoritmos convencionales, cuya comprensión total requiere la de las leyes del sistema de numeración (en especial la del valor relativo) y de las propiedades del conjunto numérico con que se opere, es conveniente una actividad sistemática con cálculos mentales y escritos, descomponiendo y componiendo los números como totalidades (en lugar de trabajar con las decenas, centenas, etc.) y asociándolos de acuerdo con cálculos y operaciones más simples que la alumna y el alumno hayan memorizado comprensivamente y puedan controlar."[3]

En relación con **las formas de calcular,** en el primer texto, **Del Conteo al Cálculo,** veremos cómo planificar la enseñanza de las operaciones para hacer evolucionar los procedimientos de resolución del conteo hacia el cálculo, desprendiéndolos de la acción y a partir de la **memorización del repertorio aditivo**; veremos cómo trabajar los **contenidos de cálculo mental** para centrar el trabajo en el cálculo horizontal de sumas y restas con distintos procedimientos basados en las **descomposiciones aditivas**, como condición previa a la construcción significativa de los **algoritmos**.

En cuanto a la **construcción de los algoritmos,** el segundo texto, **Algoritmos de Suma y Resta,** desarrolla a partir de una investigación las dificultades que los niños tienen en la comprensión del funcionamiento de los algoritmos; se analizan las producciones de los niños, determinando las características y el origen de los errores frecuentes; además se fundamenta la propuesta de trabajo sobre los algoritmos, en referencia al encuadre teórico constructivista que la sustenta.

Finalmente, en el texto **El Campo Conceptual de los Problemas Aditivos,** se presenta el trabajo complementario a desarrollar para favorecer la construcción significativa de las operaciones, desde la perspectiva de **la resolución de problemas** y del **tratamiento de la información.**

---

[1] En González, Adriana y Weinstein, Edith (1998) *¿Cómo enseñar matemática en el jardín?,* Ediciones Colihue. Bs.As. (pág. 45)

[2] Núcleos de Aprendizajes Prioritarios. Matemática. Primer Ciclo EGB/Nivel Primario (2006) Serie Cuadernos para el aula 1.MECyT

[3] En Contenidos Básicos Comunes de la Educación General Básica de la República Argentina (CBC) (1995) MCyE, Bloque 2: Operaciones (pág. 77)

DEL CONTEO AL CÁLCULO

Actividad: *Para facilitar la apropiación del texto te proponemos que armes un índice del texto con los títulos, a medida que lo vayas leyendo, de modo que se visualicen las jerarquías.*

LOS PROCEDIMIENTOS MENTALES DE RESOLUCIÓN[4]

Consideramos que **un objetivo fundamental de primero - segundo grado es el desarrollo de procedimientos mentales de resolución en el marco de los problemas**. Se trata, a la vez, de **favorecer la representación mental de las situaciones y la construcción**, por parte de los alumnos, de soluciones desprendidas de la acción misma, es decir, que permiten anticipar los resultados de una acción todavía no realizada.

Más tarde se favorecen los procedimientos escritos que se apoyan en las reglas de escritura de los números (numeración posicional). Pero para que los alumnos puedan trabajar a este nivel tienen que ser capaces de construirse una representación mental correcta de la situación y disponer de la posibilidad de obtener mentalmente ciertos resultados. (…)

En tanto consideramos fundamental lograr que todos los alumnos dispongan de procedimientos mentales de resolución y construyan comprensivamente los algoritmos, lo que vamos a plantear es que estos logros tienen que ser asumidos como **metas desde la enseñanza.**

A) LA MEMORIZACIÓN DE CÁLCULOS SIMPLES

Hay un primer requerimiento y es que, a término (hacia fin de segundo) los alumnos tienen que saber producir rápidamente (casi instantáneamente) una buena respuesta a lo que se suele llamar **el repertorio aditivo: encontrar uno de los términos a, b ó c en a + b = c, cuando a < 10 y b < 10**, lo cual no excluye el conocimiento de otros resultados pero condiciona su producción. **Esta es la base del cálculo, sea escrito o mental.**

Constance Kamii, en "El niño reinventa la aritmética", hace observaciones válidas sobre este punto: *"La mayor parte de los programas de aritmética de primer curso, empiezan la adición definiendo como objetivo las sumas que dan 5 ó 6, para continuar hasta 9 ó 10, 12 y 18. Así pues la secuencia de objetivos continúa estableciéndose de acuerdo con la* ***magnitud de la suma****, a pesar de que las investigaciones han demostrado que la dificultad depende del* ***tamaño de los sumandos****. Por ejemplo 5+1=6 es más fácil de recordar que 3+2= 5. La secuencia de objetivos que viene a continuación se basa en el tamaño de los sumandos, que corresponde a la manera de aprender de los niños. Esta información debería ayudar a los maestros a decidir qué juegos deben poner a disposición de los alumnos"*[5]. La autora sugiere:

- Adición de sumandos hasta 4.
- Adición de sumandos hasta 6 (por la utilización de dados)
- Adición de dobles (2+2, 3+3, etc.) hasta 10.

Diversas investigaciones afirman que **los dobles y las combinaciones en las que se añade 1 a un número son más fácilmente memorizadas que otras combinaciones**. Kamii señala que entre los dobles, 2+2 es la primera en ser memorizada, seguida de 5+5. Esta última, pese a ser una suma mayor es más fácil de recordar que 3+3 ó 4+4. Igualmente 10+10 es más fácil que 9+9. Además **2, 5 y 10 son apoyos fundamentales en la organización del repertorio (…)** Los dobles, además de ser fáciles de memorizar se convierten en la base para resolver otros cálculos, así 5+6 puede ser pensado como 5+5+1.

El siguiente cuadro presenta una **Distribución de Contenidos de Cálculo Mental**, realizada por la licenciada Irma Saiz para el programa de Matemática de la Provincia de Corrientes. Aparecen aquí otros cálculos simples importantes de dominar, por ejemplo a+b=10, 10 + a (a < 10). Estos mismos contenidos están incorporados al Diseño Currricular de la Provincia de Río Negro. La distribución abarca de primero a séptimo grado pero aquí presentamos sólo la parte relativa al primer ciclo.

[4] Texto extraído del Desarrollo Curricular *Los niños, los maestros y los números (*1996), Cecilia Parra e Irma Saiz, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires.
[5] Kamii, Constante (1986) *El niño reinventa la aritmética*, Visor Libros, España, pp.80 y 81.

DISTRIBUCIÓN DE CONTENIDOS DE CÁLCULO MENTAL[6]

Primer Ciclo

1º grado	2° grado	3° grado
▪ Sumas de la forma: a + b = 10 ▪ Restas de la forma: 10 - a = b ▪ Restas de la forma: a - b = 1 ▪ Sumas de la forma: a + a = ; con a ≤ 10 ▪ Complementos a 10: a + ...= 10 ▪ Sumas de la forma: 10 + a= ... 20 + a = ... ▪ Sumas de la forma: a + b = 100; con a y b múltiplos de 10 (Ej: 20 + 80 =100) ▪ Complementos de 100: a +... = 100; con a múltiplo de 10 (Ej: 70 +... = 100) ▪ Escrituras equivalentes: 34 = 30 + 4 34 = 10 + 24 34 = 10 + 10 + 10 + 4 34=40 - 6 9 = 5 + 6 - 2 9 = 2 + 2 + 2 + 2 +1 9 = 4 + 5 9 = 10 – 1. ▪ Propiedades conmutativa y asociativa.	▪ Restas de la forma: a - b = 10 ▪ Sumas de la forma: 100 + a = ▪ Restas de la forma: 100 – a = con a múltiplos de 10 (Ej: 100 - 30 = …) ▪ Complementos a 100: a +...= 100 (Ej: 28 +...= 100) ▪ Sumas de la forma: a + b = 100 (Ej: 75 + 25 = 100; 32 + 68 = 100) ▪ Dobles y mitades ▪ Escrituras equivalentes: 147 = 50 + 50 + 47 147 = 100 + 47 147 = 40 + 60 + 30 + 17 147 = 200 - 50 - 3 ▪ Distancia entre dos números (Ej.: distancia entre 50 y 76) ▪ Escalas ascendentes y descendentes del 2, 5 y 10. ▪ Propiedades conmutativa y asociativa.	▪ Escalas ascendentes y descendentes del 10, 20, ... 100, 200... ▪ Encuadramiento de números entre decenas, centenas, etc. Ejemplos: 20 < 28 < 30 140 < 145 <150 100 < 145 < 200 ▪ Restas de la forma: a - b = 1; a - b = 10; a - b = 100; etc. ▪ Escrituras equivalentes: 1359 = 500+500+300+59 = 1000+300+50+9 = 2000 - 200 - 40 - 1 ▪ Sumas y restas con medidas de tipo: años, día, mes, semana, hora, 1/4 h, etc. ▪ Multiplicaciones de la forma: a x b con a < 10 ▪ Divisiones y multiplicaciones especiales: x2; :2; x4 (multiplicar dos veces por 2); x 8 (multiplicar tres veces x 2); : 4 (dividir dos veces por 2); x 5; :5; etc. ▪ Dobles y mitades. ▪ Triples y tercios. ▪ Propiedades conmutativa y asociativa.

Un maestro de segundo o tercer grado que se plantee incluir estos contenidos deberá considerar lo que está propuesto para grados anteriores y evaluar el nivel de dominio que tienen sus alumnos seleccionando sus propuestas en consecuencia.

B) RESOLUCIÓN DE CÁLCULOS NO TAN SIMPLES UTILIZANDO LOS SIMPLES

Se busca favorecer que los alumnos utilicen sus conocimientos para tratar las situaciones respecto de las cuales no disponen de resultados memorizados.

Por ejemplo, disponer de los pares de sumandos que dan 10 les permite a los alumnos tratar diversos cálculos. Así para hacer 8 + 6 muchos niños piensan en (8 + 2) + 4. O en cálculos de resta, por ejemplo 14 - 6, lo convierten en (14 - 4) - 2.

Es importante favorecer la búsqueda y explicitación de distintas maneras de tratar un cálculo.

Por ejemplo, para 7 + 8: (7 + 7) + 1 Reagrupamiento en torno a un doble
(7 + 3) + 5 Reagrupamiento en torno a 10
(8 + 2) + 5 Reagrupamiento en torno a 10
(5 + 5) + 2 + 3 Reagrupamiento en torno a 5

No se trata sin embargo de "enseñar" estas diferentes alternativas ni de que cada alumno deba "conocer" cada una. Se trata más bien de **que cada uno encuentre sus maneras preferidas** utilizando a fondo el grupo para dar la ocasión de adherir a las soluciones

---
[6] Esta distribución de contenidos ha sido extraída de Didáctica *de matemáticas. Aportes y reflexiones.* Parra y Saiz (1997), páginas 240 a 242.

propuestas por otros. El **recurso a la imitación** es un recurso inteligente en la medida en que supone el reconocimiento del valor de lo propuesto por otro.

Sabemos que hay niños que parece que nunca se les ocurre nada pero nuestra experiencia nos muestra que si este trabajo se asume desde la perspectiva de la enseñanza y como meta para toda la clase esos niños dejan de estar en soledad enfrentados a tamaña empresa y se involucran en la tarea consiguiendo definidos logros.

La utilización de cálculos simples para resolver otros más complejos se vincula de modo inmediato con el trabajo que se haga en relación a la extensión de la **serie numérica**, la comprensión de las **regularidades** de su funcionamiento, la interpretación de su codificación escrita, etc.

Aquí queremos referirnos a la importancia de desarrollar en los niños diversos modos de resolución en los que utilizan sus **conocimientos sobre los números y las propiedades de las operaciones como condición para una construcción de los algoritmos**, en la cual los alumnos conserven el control de lo que hacen y entiendan su sentido.

C) LA CONSTRUCCIÓN DE ALGORITMOS[7]

Los algoritmos son técnicas elaboradas, reconocidas en la cultura y que tienen un gran valor en tanto permiten obtener un resultado independientemente de los números que intervienen. Tienen un carácter general y estamos convencidos de que los alumnos deben disponer de los algoritmos.

Sin embargo defendemos la idea de **que los alumnos construyan su propio camino hacia los algoritmos y que además sean capaces de reconocer cuándo es pertinente e imprescindible utilizarlos.**

Durante primer grado y buena parte de segundo los alumnos interpretan a los números de dos cifras, 23 por ejemplo, como una representación de una cantidad similar a la de los dígitos, son 23 objetos. Estamos convencidos de que **el análisis en términos de decenas y unidades rebasa las posibilidades de los alumnos de primer grado** fundamentalmente porque no se vincula con lo que saben y con el modo que tienen de apropiarse de la serie numérica.

Veamos distintas resoluciones de un mismo cálculo en alumnos de primer grado:

23	23	23	23
+ 6	+ 6	+ 6	+ 6
29	29	83	11

El segundo y tercer alumno encolumnaron mal, sin embargo el segundo retiene el significado del 6 y lo adiciona correctamente. El tercero trata de utilizar reglas que permanecen para él arbitrarias y sin sentido, tanto que pierde totalmente el control sobre la respuesta que produce. Probablemente, en el esfuerzo de usar una regla "oficial" descarta otros procedimientos de los que quizás dispone, como contar 6 desde 23. Algo similar sucede con el cuarto alumno que muestra una versión más degradada de la regla que se le quiso transmitir: suma todas las cifras, donde 2 ya no es 20 ni forma parte del 23.

Sin embargo saben, y apuntamos a que sepan, muchas cosas sobre el número 23: que está después del 22 y antes del 24, que está entre 20 y 30, que es 20 + 3, que es 10 + 10 + 3, etc. Es en este conocimiento de los números en el que van a apoyarse los alumnos para resolver cálculos como 23 + 14. Lo pueden pensar como: 20 + 10 + 3 + 4 ó 23 + 10 + 4.

Para poder entender el encolumnamiento tiene que estar asegurada la comprensión del "2" que vale 20 y tenemos que favorecer ese tratamiento porque es el que permite "partir de lo que los niños saben".

Por ejemplo, existen dos resoluciones posibles de 23 + 18, que marcan, en cierto modo, los **extremos del camino "del conteo al cálculo":** contar marcas y utilizar el algoritmo.

Además de los procedimientos resultantes del mejoramiento del conteo, existen aún antes del algoritmo, otras soluciones posibles en el terreno de los **procedimientos mentales de resolución.**

[7] Algoritmo: "Serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza en un número finito de etapas a cierto resultado"

Por ejemplo: 20 + 3 + 10 + 8   23 + 20 – 2   23 + 7 + 10 + 1

30 + 11   43 – 2   30 + 10 + 1 = 40 + 1

Por supuesto que el algoritmo es más económico y eficiente, pero para los alumnos dicho convencimiento llega con el dominio del mismo. Estamos refiriéndonos a un problema muy complejo y sabemos que no disponemos de respuestas contundentes y globales para enfrentarlo. Pero queremos acercar propuestas que tienen carácter de aproximación desde una perspectiva en la que **buscamos respetar las exigencias de partir de lo que los niños saben y asegurar construcciones con significado**.

El CÁLCULO MENTAL

Hemos planteado que **los procedimientos mentales de resolución juegan un papel fundamental en el pasaje del conteo al cálculo y en la construcción de algoritmos**. Estos procedimientos se engloban en el concepto de cálculo mental que consideramos necesario desarrollar más, para mostrar su rol en la adquisición de nociones matemáticas, el cual no se agota, en primero y segundo grado.

El cálculo mental, tal como lo definimos aquí, no se opone a cálculo escrito ni se asocia a velocidad. Se trata fundamentalmente de **cálculo reflexionado, pensado**. Se diferencia de lo que algunos autores llaman **cálculo automático**, el cual se caracteriza por el empleo sistemático, para una operación dada, sean cuales sean los números, de un algoritmo único: empleo de una técnica escrita, de un material.

El cálculo pensado es **particularizante**. Se desarrolla a partir del análisis de los números y de la operación que interviene. En este sentido cada problema es nuevo y el aprendizaje consiste esencialmente en tomar conciencia de que para una misma operación ciertos cálculos son más simples que otros. Esto implica que los alumnos pueden usar y tomar en cuenta ciertas facilitaciones que aportan al cálculo **las propiedades del sistema de numeración posicional**.

El cálculo mental es una opción, entre otras, a la cual puede apelar un sujeto que domina las distintas alternativas. En la vida cotidiana usamos la estimación, el redondeo, la aproximación si la situación no requiere de una respuesta exacta. Y aún en ciertos casos de respuesta exacta no optamos por el algoritmo sino que usamos un recurso articulado sobre la peculiaridad de las cantidades que intervienen. Por ejemplo para hacer 35.000+29.000, es cómodo hacer 35.000+30.000-1.000.

La finalidad del trabajo de cálculo mental pensado es que los alumnos tengan hábitos de reflexión sobre los cálculos y dispongan de medios permanentes de aproximación, de control sobre lo que obtienen usando técnicas o algoritmos.

El cálculo pensado es hoy, existiendo las calculadoras, más útil y formador que el cálculo automático (para el cual existen justamente las calculadoras). Por mucho que faciliten las calculadoras siempre tendrá que haber un sujeto que hace un uso inteligente de las mismas, que ordena las operaciones (tiene que saber cuál) y que controla la razonabilidad de lo que obtiene.

De ninguna manera estamos proponiendo excluir o reemplazar el cálculo escrito y exacto. Todos los niños deben poder realizar cualquier cálculo que se les proponga. El cálculo automático tiene la ventaja de poder aplicarse mecánicamente sin necesidad de reflexionar en cada paso. Es cierto que no es necesario en todos los casos y los alumnos tendrán que aprender a reconocer su pertinencia de uso.

¿Cómo puede organizar el docente la enseñanza para alcanzar las finalidades planteadas?

La construcción paralela y vinculada del cálculo pensado y del cálculo automático requiere que se lleven adelante, sistemáticamente, **dos tipos de actividades**:

***** Un trabajo de memorización de repertorios y reglas, a medida que se han ido construyendo

***** Y un trabajo colectivo, lento y detallado, de aprendizaje del cálculo mental pensado, que se apoya en la comparación de diversos procedimientos utilizados por distintos chicos para tratar el mismo problema.

Acerca de la memorización

Citamos aquí lo expuesto por el equipo ERMEL[8]: "Existen numerosos trabajos sobre la memoria (…) Simplificando en extremo se pueden retener algunos elementos:

- La repetición es un factor favorecedor, a condición de no ser el único medio utilizado y de ser realizado a través de actividades variadas, juegos, interrogaciones rápidas, etc.
- El modo cómo se memorizó influye en la capacidad de recuperación de resultados. Mejor evitar el recitado para que los alumnos no se vean obligados a recitar la cantinela desde el inicio para hallar 7 x 8.
- Se memoriza mejor lo que se ha comprendido, lo que tiene sentido e interés para uno.
- Se memoriza mejor un conjunto de elementos estructurados, organizados entre ellos, que un conjunto de elementos aislados. La maestra propondrá entonces actividades que favorezcan esta estructuración: apoyo sobre los dobles, pasajes por la decena, utilización de resultados conocidos para encontrar un resultado vecino.

EN PRIMER GRADO

LA RECONSTRUCCIÓN DE LOS CÁLCULOS Y LA REFLEXIÓN

Al principio la memorización no se pone en escena. Ante las situaciones y actividades que se les proponen, los alumnos producen resultados por sus propios medios. El maestro selecciona y propone cálculos que favorecen procedimientos reconstructivos. Los alumnos buscan recursos para resolverlos, interactuando en pequeños grupos, y utilizando si es necesario, papel y lápiz. Posteriormente se analizan los distintos recursos y se discute la aplicabilidad y eficiencia de cada uno en el cálculo planteado. Esto les va permitiendo a los alumnos **reconocer la utilidad de usar resultados conocidos para resolver otros cálculos**. Se va construyendo **un repertorio colectivo**, visible en la clase y utilizable como recurso.

En el desarrollo de la secuencia del **Juego de la Caja**[9] se muestran algunas de las actividades que se pueden plantear a raíz del repertorio y que conducen a **reflexiones sobre los cálculos y a la toma de conciencia**, por parte de los alumnos de lo que saben (en lo que se pueden apoyar) y de lo que tienen que aprender para poder resolver mejor los problemas o los cálculos y ganar en los juegos (los juegos constituyen una buena motivación para la memorización).

Como dicen los miembros del equipo ERMEL en su documento: "*el cálculo mental es un asunto de trabajo (saber y entrenamiento), de memoria* ***y sobre todo de confianza en uno mismo''.*** Algo de esta envergadura no se logra en primero y segundo, pero debemos apuntar a ello desde el inicio. **Es la relación con el saber la que está en juego y debemos cuidarla desde los primeros contactos.**

REPERTORIO INTERNO Y REPERTORIO EXTERNO[10]

Repertorio Interno

Cada alumno es invitado a anotar en un cuaderno lo que sabe: la maestra debe explicar la diferencia entre "saber" y "saber calcular" o "saber reencontrar". Por ejemplo: todos los alumnos saben 2+2=4, todos saben calcular 9+4=13 sobrecontando o por algún otro método. Este cuaderno constituye la imagen del "repertorio interno" del alumno. Es puesto al día a medida en que se aprendan nuevos resultados.

Repertorio Externo

Se trata de un repertorio de uso colectivo en un gran afiche. En una caja se colocan cartones con todas las sumas posibles de 1+ 1 a 9+ 9. A partir de que un resultado es conocido por lo menos por un tercio de la clase, se toma de la caja la tarjeta correspondiente y se lo pone en el afiche. Cuando un resultado es conocido por toda la clase, es retirado del afiche y es puesto en una segunda caja.

[8] ERMEL(1991), *Apprentisages numériques et resolution de problémes.* Cours Préparatoire, Hatier, París, p. 125.
[9] Desarrollada en el anexo de Actividades
[10] Guillaume, J.C., La memorización del repertorio aditivo en primer grado, I.N.R.P., abril, 1988.

En una experiencia que se hizo con esta propuesta la maestra comentó lo que quería decir "saber" y algunos chicos decían "los que sabemos al toque", "enseguida", etc. Se insistió sobre el hecho de que los que no supieran los iban a "estudiar", iban a ser motivo de trabajo. Por lo cual ser "veraces" era protector. En la puesta en común los cálculos que todos sabían fueron a parar a una caja "Las que sabemos", el resto se puso en un afiche a la vista de todos.

En relación con los juegos

Para desarrollar el propósito de la secuencia del Juego de la Caja (**hacer evolucionar las estrategias de resolución hacia el cálculo**) se pueden utilizar otros juegos, por ejemplo:

LOTERÍA DE DADOS[11]

Propósito: Se busca proponer situaciones en las que los alumnos tengan que realizar cálculos mentales, explicitar los procedimientos utilizados, compararlos y analizarlos para hacer evolucionar sus estrategias de cálculo mental.	
Materiales: Un cartón de lotería con los números del 2 al 12 para cada alumno, dos dados, fichas, papel y lápiz.	**Organización:** En grupos de 4 a 6 alumnos.
Reglas del juego: *Por turno, cada jugador tira los dados, registra lo que sale, suma los valores y dice la suma. Los jugadores que tienen ese número en su cartón ponen una ficha. Gana el que cubre primero.*	

Consideraciones didácticas: Los juegos pueden ser presentados con distintos propósitos vinculados con el desarrollo de estrategias de cálculo mental.

Si el objetivo es encontrar diferentes formas de pensar los cálculos, en el momento de reflexión posterior al juego se pegan o copian en el pizarrón los registros realizados y se pregunta a los alumnos cuáles fueron los cálculos cuyo resultado ya conocían (los memorizados) y cuáles tuvieron que pensar.

Si al realizar los registros algunos alumnos dibujaran los dados y contaran los puntos para obtener la suma, habría que plantear como regla la necesidad de usar números para registrar. Si aún así hubiera muchos alumnos que mantuvieran estrategias de conteo, habría que trabajar con otras actividades antes de comparar distintas formas de pensar los cálculos.

Seguramente aparecerán como conocidos algunos dobles (2+2, 3+3) y sumas donde uno de los sumandos es 1. Se puede hacer una lista con los resultados conocidos para poner en un panel como –repertorio conocido por el grupo– y seleccionar otros cálculos para discutir cómo los pensaron.

Si se consideran los cálculos donde uno de los sumandos supera al otro en 1 (1+2, 2+3, 3+4…), y los dobles figuran en el repertorio conocido, resulta más rápido pensar en el doble del primero y sumar uno que sobrecontar a partir del primer sumando.

Si en los registros no hubiera suficientes ejemplos, es posible organizar en el pizarrón una tabla con 12 columnas con los números del 2 al 12 –todos los resultados posibles– donde los alumnos irán anotando, por turno, los cálculos que cada uno hizo y que corresponden a cada resultado. Cuando todos los cálculos obtenidos están anotados, se puede discutir sobre los que están en algunas de las columnas, y si les parece que hay otros cálculos posibles de escribir en ellas que no han sido anotados.

Si el objetivo es descubrir la propiedad conmutativa, al comparar los registros se puede focalizar la atención en diferentes sumas que den el mismo resultado y seleccionar aquellas que tienen los mismos sumandos. Al comparar los cálculos es posible descubrir que algunas sumas resultan más fáciles que otras según el procedimiento usado para resolverlas. Por ejemplo, cuando se suma por sobreconteo, se puede "transformar" una cuenta difícil en otra más fácil: 5 + 3 (cinco, seis, siete, ocho) resulta más fácil que 3 + 5 (tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho). En este caso no es necesario explicitar que se trata de "la propiedad conmutativa

[11] Actividad desarrollada en *Juegos en Matemática. EGB 1. El juego como recurso para aprender"*, Dirección de Gestión Curricular y Formación Docente, MECyT, Buenos Aires, 2004. Incluye los materiales. (Todo el material -para alumnos y docentes, para EGB 1 y 2- se encuentra en la página http://www.me.gov.ar/curriform.html, ir a Publicaciones y luego a Áreas Curriculares)

de la suma", sino que basta que los alumnos puedan usarla y la enuncien con sus palabras: "se puede sumar poniendo primero el más grande porque el resultado da lo mismo".

El dominio del cálculo mental no se logra haciendo muchos cálculos. Para disponer de estrategias eficientes resulta imprescindible explicitar los procedimientos utilizados, analizarlos y compararlos para hacerlos evolucionar. Cuando esto se realiza en forma sistemática es posible organizar un panel de "trucos para sumar más rápido" donde se van registrando los procedimientos descubiertos, con el vocabulario propio de los alumnos.

VARIANTE: LOTERÍA DE CUENTAS

Materiales: Tarjetas con cálculos preparados por el docente cuyo resultado esté comprendido entre 2 y 12, una bolsa o caja para guardar las tarjetas.	**Organización:** individual
Reglas del juego: El docente saca una tarjeta de la bolsa y dice el cálculo. Los jugadores que tienen el resultado correspondiente en su cartón ponen una ficha. Gana el jugador que cubre primero todos los números de su cartón.	

Consideraciones didácticas: Este juego permite volver sobre lo trabajado en el juego anterior y evaluar el desempeño de los alumnos tanto para realizar sumas con sumandos entre 1 y 6, como para aplicar las estrategias descubiertas en clases anteriores.

En este caso, el docente seleccionará los cálculos en función de la estrategia cuya aplicación quiere evaluar. Por ejemplo:

3+3, 2+2, 5+5, 4+4, 6+6 si quiere evaluar la memorización de los dobles;
2+3, 4+5, 3+4, 5+6, 1+2 si quiere evaluar la estrategia "el doble más uno" o el uso de la propiedad conmutativa;
5+7, 4+6, 6+8, 3+5, 6+9, 7+9, 8+9, 5+9 si se quiere evaluar sumas equivalentes sacando 1 a un sumando para agregárselo al otro; etc.

En todos los casos, al finalizar el juego, es necesario preguntar a los alumnos cómo obtuvieron los resultados.

Actividades complementarias: Se pueden presentar problemas a los alumnos. En todos los casos se trata, primero, de discutirlos en pequeños grupos, hacer una puesta en común y registrar las conclusiones destacando aquellas que el docente considere relevantes en relación con el contenido a enseñar.

El objetivo de comparar procedimientos y reflexionar sobre ellos no es lograr que todos los alumnos usen los mismos, ya que aún frente a una misma situación, no es posible encontrar una única forma de resolución que sea "la mejor" para todos los alumnos. Por ejemplo, analicemos el problema siguiente:

> Después de jugar a la lotería de dados, Julia y Tobías discutían:
> Julia: *–Si tenés tres más cinco, es más fácil poner el más grande primero.*
> Tobías: *–No importa cuál va primero, porque si le sacás uno al cinco y se lo ponés al tres, quedan iguales y es más fácil.*
> ¿Ustedes qué piensan? ¿Alguno de los chicos tiene razón? ¿Quién? ¿Por qué?

En este problema, aunque el procedimiento de Tobías implica el manejo de descomposiciones aditivas, no hay un procedimiento "más eficiente" que otro pues corresponden a distintas maneras de pensar la situación. Si en otro caso la cuenta fuera 7 + 12 tal vez resultaría mejor, desde la perspectiva de un adulto, la estrategia de Julia. Sin embargo es posible pensar en sacarle dos al doce, agregarlos al siete y sumar diez más nueve, estrategia muy eficiente cuando no se dispone de los resultados memorizados.

De todos modos, reiteramos que **no se trata de homogeneizar procedimientos** sino de ofrecer un repertorio suficientemente rico como para que cada alumno encuentre alguna forma de resolver y a la vez pueda comparar sus procedimientos con otros y reflexionar sobre ellos para mejorarlos.

En todos los casos es necesario solicitar desde las reglas del juego, el **registro por escrito** de los valores que se deben sumar para poder realizar posteriormente una puesta en común que se centre en la comparación y clasificación en "cálculos fáciles y difíciles" y en el análisis de las estrategias posibles.

¿Cómo pasar del cálculo horizontal a los algoritmos?[12]

Una enseñanza centrada desde un inicio, en diferentes procedimientos de cálculo, hará que los niños comprendan cómo funcionan los algoritmos y posean estrategias de control sobre las acciones que realizan con los números. *El trabajo sobre el cálculo (mental o escrito) es una vía de ingreso al algoritmo y a la vez una herramienta de control sobre el mismo*. Los algoritmos tienen la particularidad de llegar a un resultado exacto siempre y cuando se realicen todos los pasos y reglas necesarios. Si el niño olvida alguna de las reglas involucradas, no llega al resultado esperado. (…)

Por ello, desde este enfoque didáctico, se privilegia la enseñanza del cálculo horizontal. Así, no solo se comprenderá mejor el funcionamiento de los algoritmos sino que también los cálculos serán una herramienta de control sobre los mismos. Una particularidad de este modo de trabajo es que, cuando calculan, los niños usan de modo implícito las propiedades de las operaciones (conmutan, asocian, realizan descomposiciones) y según los números involucrados toman diferentes decisiones. En definitiva, cada cálculo se transforma en un verdadero problema. Las descomposiciones aditivas (154 como 100+50+4) realizadas sobre el sistema de numeración, serán el punto de partida para comprender los cálculos.

Los algoritmos aún están en la escuela y hay que enseñarlos, y dependiendo de la situación y de los números, en ocasiones son más económicos. Por ejemplo, para 273-56 =, se realiza un algoritmo, pero para 1+1, 2+2, 10+10, no se debería utilizar el algoritmo.

¿Cómo se comprende el funcionamiento de los algoritmos?

Para comprender su funcionamiento hay que comparar procedimientos y reflexionar sobre ellos. Observemos el siguiente ejemplo de una misma cuenta y las preguntas que el docente puede realizar para reflexionar a propósito de los mismos.

Manuel 25 + 28 + 22 =
20 + 20 + 20 = 60
8 + 5 + 2 = 15
60 + 15 = 75

Victoria
$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 25 \\ 28 \\ \underline{22} \\ 75 \end{array}$$

Docente: *Victoria, ¿por qué Manuel suma 60 + 15?*

Otro ejemplo con números más grandes y nuevas estrategias para calcular puede ser el siguiente:

Candela
$$\begin{array}{r} {}^{1} \\ 149 \\ \underline{{}^{+}\,125} \\ 274 \end{array}$$

Luz 149 + 125 =
100 + 100 = 200
50 + 25 = 75
75 – 1 = 74
200 + 74 = 274

También aquí el docente tiene que realizar preguntas en torno a la interpretación de estos dos modos de resolver.

¿Por qué Luz hace 50 + 25 y luego le resta 1, si la cuenta no tiene un "50 "?
¿Qué significa el 1 que Candela escribe arriba del 4?

Analicemos algunos procedimientos para restar 35 – 17:

Ezequiel
35 – 17 =
35 – 15 = 20
20 -2 = 18

Martín
$$\begin{array}{rl} 35 & \overset{20}{\cancel{30}} + \overset{10}{5} \\ \underline{-\,17} & \underline{-\,10 + 7} \\ & 10 + 8 = 18 \end{array}$$

Sebastián
$$\begin{array}{r} {}^{2\,1} \\ 35 \\ \underline{-\,17} \\ 18 \end{array}$$

El primer procedimiento, en forma de cálculo horizontal, muestra control y conocimiento sobre los números. El alumno resta 15 al 35 porque es más fácil y luego resta 2 controlando los 17 que tiene que restar, es decir, sabe que 17 = 15 + 2.

El segundo procedimiento es muy cercano al algoritmo tradicional. Se descomponen los números aditivamente y luego se los resta. En este caso se transparenta que 5-7 "no se puede", por eso, "pido 10 al 30" que queda en 20. Estamos a un paso de comprender la lógica del algoritmo convencional. La idea es hacer más transparente el funcionamiento del algoritmo. No se piensa en que el segundo ejemplo se instale como nuevo algoritmo en las aulas, sino que el docente conozca esta estrategia para quienes lo necesiten.

Las interpretaciones que los niños realicen, como resultado de comparar procedimientos de resolución, ayudarán a comprender el funcionamiento de los algoritmos.

[12] Texto extraído y reelaborado del Capítulo *Suma y Resta* de Fernanda Penas, en *Enseñar Matemática en la escuela primaria* (2006), Autores Varios, Tinta Fresca Ediciones, Serie Respuestas, Buenos Aires.

EL CAMPO CONCEPTUAL DE LOS PROBLEMAS ADITIVOS

La resolución de problemas se reconoce como un núcleo central de la actividad matemática. Se busca que los alumnos construyan conocimientos que les permitan resolver problemas. Al mismo tiempo se constata que alumnos que supuestamente "saben" algo no son capaces de utilizarlo a la hora de enfrentar problemas ante los cuales ese conocimiento es útil. De algún modo, esos conocimientos, carecen de significado. La cuestión esencial de la enseñanza de la matemática es entonces:

¿Cómo hacer para que los conocimientos enseñados tengan sentido para el alumno?
El alumno debe ser capaz no solo de repetir o rehacer, sino también de resignificar en situaciones nuevas, de adaptar, de transferir sus conocimientos para resolver nuevos problemas y *"es en principio, haciendo aparecer las nociones matemáticas como **herramientas** para **resolver problemas** como se permitirá a los alumnos construir **el sentido**. Sólo después estas herramientas podrán ser estudiadas por sí mismas." (Roland Charnay)*[13]

¿Qué entendemos por "construir el sentido"?

Para Guy Brousseau[14] *"…el **sentido** de un conocimiento matemático se define:*

> *- no sólo por la colección de situaciones donde este conocimiento es realizado como teoría matemática, no sólo por la colección de situaciones donde el sujeto lo ha encontrado como medio de solución*
> *- sino también por el conjunto de concepciones que rechaza, de errores que evita, de economías que procura, de formulaciones que retoma, etc."*

¿Qué es un Campo Conceptual?

Gérard Vergnaud, psicólogo dedicado al estudio del aprendizaje matemático desarrolló la **Teoría de los Campos Conceptuales**, que se fundamenta en ciertas ideas básicas, a saber:

- *que un concepto adquiere **sentido** en función de la **multiplicidad** de problemas a los cuales responde;*
- *que los conceptos **no funcionan aisladamente**, sino vinculados unos con otros en una amplia y compleja red;*
- *que el aprendizaje de todas las propiedades y relaciones que involucran tales conceptos se cumple a través de **una larga historia**, entretejida por una serie de **filiaciones y rupturas**;*
- *que un concepto no remite sólo a su definición explícita sino básicamente a su posibilidad de funcionar en la **resolución de problemas.***

Es decir que, en el momento del aprendizaje, distintos tipos de problemas permiten "hacer funcionar" un concepto de diferentes maneras, cada una de las cuales hace posible establecer algunas propiedades, relaciones y "modos de entender" específicos que forman parte del sentido del concepto. El pasaje de una manera de "hacer funcionar" un concepto a otra no es automático y, para que éste sea posible, los alumnos deberán poder establecer relaciones entre esos funcionamientos.[15]

La adición y la sustracción: contextos y significados[16]

Los maestros utilizan, generalmente, gran parte del tiempo destinado a la enseñanza de la adición y la sustracción (y con un enorme esfuerzo de su parte) a que los chicos aprendan a calcular correctamente con lápiz y papel, es decir a hacer cuentas de suma y resta, usando el *algoritmo* (comúnmente llamado cuenta vertical). Ya que lo mencionamos...

[13] En el capítulo Aprender por medio de la resolución de problemas de Parra, Cecilia y Saiz, Irma (comps) (1994) Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones, Ed. Paidós. Buenos Aires.
[14] Citado por Charnay en el mismo texto mencionado.
[15] En el Prediseño Curricular de la Ciudad de Buenos Aires, (1999), pág. 146.
[16] Este material fue elaborado a partir del texto de Ana María García y Gustavo Zorzoli (1996) en la Revista Lápiz y Papel Matemática Nº 1, Primer Ciclo, Tiempos Editoriales, "Cuénteme cómo le cuenta a los chicos cómo contar para hacer las cuentas",pp. 12 a 15. Digitalizado con fines didácticos para la cursada de Matemática 2, IFDC El Bolsón.

¿Qué significa la palabra algoritmo para la matemática?

Algoritmo es toda secuencia finita de procedimientos con el objetivo de alcanzar un resultado para resolver un problema. Algunos ejemplos son:

* Las formas en que calculamos con lápiz y papel la suma, la resta, el producto de dos números naturales.
* Las reglas que usamos para encontrar los resultados de las mismas operaciones pero con fracciones.
* Los pasos que seguimos para construir un triángulo equilátero usando regla y compás.
* Las etapas que cumplimos para determinar el múltiplo común menor (MCM) entre dos números. Y etcétera, etcétera, etcétera... Como habrá advertido son muchos los contenidos de enseñanza que son algoritmos (y aquí sólo hemos enumerado algunos ejemplos). Pero, en la escuela...

¿Cuál es el momento para enseñar los algoritmos más utilizados?

Esta pregunta no es fácil de responder y requiere de una reflexión. Una corriente de pensamiento en la didáctica de la matemática sostiene que antes de operar con los algoritmos convencionalmente aceptados, los chicos no sólo deben haber construido, diseñado, ensayado, desechado, simplificado y sustituido procedimientos propios, sino que, ante todo, deben haber construido la significación de cada una de las operaciones, procesos o conceptos que dichos algoritmos permiten encontrar.

¿Qué quiere decir construir la significación?

Que los chicos conozcan el campo de aplicabilidad de un concepto, los márgenes de validez del mismo y cómo y por qué este concepto funciona de una manera particular y no de otra.

Entonces...**¿Qué es necesario hacer antes de abordar el estudio de los algoritmos de la suma y la resta?**

En primer lugar, ofrecer a las alumnas y alumnos la oportunidad de resolver la gama más amplia posible de problemas en los que el concepto que se pretende estudiar se ponga en funcionamiento. Esa será una buena oportunidad para que usted investigue cuáles son las hipótesis que sus alumnos tienen en relación con estos conceptos. Además, advertirá cómo en muchas oportunidades las alumnas y alumnos son capaces de resolver situaciones con saberes que, si bien no pueden explicitar, funcionan como una respuesta adaptada al problema. Ahora bien, cuando hablamos de la gama más amplia de problemas...

¿A qué clase de problemas hacemos referencia?

Para analizar esta cuestión, intentaremos discutir, en primer lugar, la estructura "interna" de los problemas que se resuelven mediante sumas y, más tarde, la de aquellos en los cuales es necesaria una sustracción. En principio, ¿qué reflexión sugiere la siguiente situación de clase?

Maestra: Resuelvan este problema:

Sofía tiene 12 caramelos y le regalaron 6. ¿Cuántos caramelos tiene Sofía?

Analía: *(Contestando muy rápido)* Tiene 12.

Maestra: No. Pensálo y lee de nuevo el problema.

Analía: *(Sorprendida relee el problema e insiste)* Seño, tiene 12.

La respuesta de Analía está, sin duda, basada en algo; sin embargo, su maestra espera que, después de plantear una adición, ella conteste 18. A pesar de eso Analía se aferra a la otra respuesta, ¿por qué?

Para responder es necesario encontrar la lógica que esta niña usó. Ante todo, analicemos el enunciado del problema. La primera frase afirma que Sofía "tiene" 12 caramelos (y por el tiempo verbal, los "tiene" en la actualidad), la segunda oración no modifica ese estado porque "regalaron" indica un hecho pasado, anterior a su estado actual. La pregunta está dirigida a esta misma situación actual, de modo que la respuesta de Analía es correcta y coherente con la pregunta. Sin embargo la maestra, apegada a la respuesta que esperaba obtener y sin pensar detalladamente en el enunciado del problema, ha incurrido en un error: no diseñar adecuadamente la situación. Para obtener la respuesta 18 caramelos hubiera sido más apropiado el siguiente enunciado:

Sofía tenía 12 caramelos y le acaban de regalar 6. ¿Cuántos caramelos tiene Sofía?

Este ejemplo permite concluir que *los enunciados* de los problemas son muy importantes, y que detrás de ellos se esconden diferentes formas de interpretar las operaciones matemáticas.

¿Encontrás alguna diferencia entre los siguientes problemas?

A. Juan tiene 32 bolitas blancas y 24 bolitas negras. ¿Cuántas bolitas tiene Juan en total?
B. Juan tenía 32 bolitas blancas. Acaba de ganar otras 24 bolitas jugando con Damián. ¿Cuántas bolitas tiene Juan?
C. Juan tiene 32 bolitas blancas. Perdió 24 bolitas en el último recreo. ¿Cuántas bolitas tenía Juan antes de salir al recreo?
D. Juan ganó 32 bolitas en el primer recreo. Acaba de ganar otras 24 bolitas en este recreo. ¿Cuántas bolitas más tiene Juan ahora que antes de salir al primer recreo?
E. Juan perdió 32 bolitas en el primer recreo. Acaba de perder otras 24 bolitas en el segundo recreo. ¿Cuántas bolitas menos tiene Juan ahora que antes de salir al primer recreo?

Pensá sobre cada uno de ellos y buscá la respuesta. No sigas leyendo, resolvelos.

Como habrás advertido, todos se resuelven mediante la cuenta 32 + 24 y la respuesta es sistemáticamente 56 bolitas. De cualquier manera, algunos enunciados son más "transparentes".

¿Será que la suma funciona en todos ellos de la misma manera?

Vayamos paso a paso. En el problema A Juan tiene por un lado 32 bolitas, por otro 24 y para contestar la pregunta es necesario **reunir** esas dos **colecciones**, ya sea agregando 24 a 32 o viceversa.

En el caso B, Juan tenía (tiempo pasado) 32 bolitas y se produce una **modificación de ese estado**: él gana 24 bolitas. De esta manera pasa a un nuevo estado: tener 56 bolitas.

En el problema C se da como dato el **estado actual** de Juan y una pérdida que modificó su **estado inicial**. Se pide que se averigüe justamente este estado inicial. Observamos que hay una **palabra clave/indicio** ("perdió") que dificulta el problema ya que probablemente oriente a las chicas y los chicos a pensar en la sustracción.

Finalmente, los problemas D y E no preguntan acerca del estado de la colección de bolitas de Juan, sino cómo se modificó o transformó globalmente. La dificultad reside en que este estado no es dato, es decir, no se dice la cantidad de bolitas que Juan tenía en un principio. En el problema E además, nuevamente la palabra "perdió" dificulta aún más la resolución.

En los últimos años, hubo un esfuerzo considerable por parte de los didactas en matemática en estudiar cómo las chicas y los chicos interpretan esta diversidad de significados de cada operación. Los resultados obtenidos indican que los problemas cuyas estructuras son similares a los del tipo A o B tienen mayor posibilidad de ser resueltos con éxito por parte de los alumnos en los primeros grados, que los de clase C le siguen en grado de dificultad, mientras que los del tipo D y E resultan de mayor complejidad.

Esto no quiere decir que este tipo de problemas no deban plantearse. Habrá que tener en cuenta que será necesario planificar la gestión de la clase con momentos diferenciados, en los que la **interacción grupal** puede favorecer ciertas apropiaciones a partir de las **concepciones e interpretaciones** de los niños, para luego analizar, comparar y reflexionar sobre los distintos razonamientos en una **puesta en común.**

Por lo tanto, diseñar los enunciados de los problemas es un trabajo considerable que siempre debe hacerse con el fin de ir presentando diferentes posibles interpretaciones para esta aparente "única" operación: la adición.

El análisis de los problemas aditivos a través de sus esquemas permite al docente:

- formular **variantes** de ellos cambiando el lugar de la incógnita;
- secuenciarlos en función de su complejidad en forma gradual;
- proponer un trabajo rico y variado, evitando caer en el "problema tipo";
- provocar distintos cálculos dentro de la misma clase de problemas;
- estar atentos a los procedimientos utilizados por los alumnos;
- enriquecer el significado de las operaciones adición y sustracción a lo largo de toda la escolaridad.

Al analizar las variantes que se obtienen según el lugar que ocupa la incógnita surgen distintos **problemas de resta**.

¿Encontraremos también para esta operación varias significaciones? Analicemos los siguientes problemas:

F. Sol tenía 47 figuritas. Jugando con su amiga acaba de perder 13. ¿Cuántas figuritas tiene ahora Sol?

G. Sol tiene un álbum para pegar 47 figuritas. Ya tiene 13 figuritas pegadas. ¿Cuántas figuritas le faltan para completar el álbum?
H. Sol tiene 47 figuritas en la escuela. Dejó en su casa un paquete con otras 13. ¿Cuántas figuritas más tiene en la escuela que en su casa?

En el primer enunciado F se plantea el problema de encontrar el estado final, es decir la cantidad final de figuritas, ya que se produjo una modificación del estado inicial (47 figuritas) por la pérdida (una transformación) de 13. Es bastante claro que lo que llamamos habitualmente **diferencia** entre ambos números permite calcular la respuesta al problema: esta clase de significado es la que chicos y chicas acostumbran a asociar con la sustracción.

El segundo problema G puede pensarse como una situación en la que se pretende encontrar la transformación (estado inicial: 13 figuritas ya pegadas en el álbum, estado final: 47 figuritas en total en el álbum; transformación: 34 lugares vacíos a llenar) Pero el modo de interpretar la pregunta: ¿cuántos faltan...? no se basa en la noción de diferencia sino, más bien, en la de **complemento:** es necesario calcular una cantidad (34) que junto a otra (13) completan un todo (47). Esta clase de enunciados trae a menudo problemas y es común encontrar soluciones de tipo aditivo, es decir, los chicos y las chicas cuentan a partir de 13 para llegar al 47 y calculan, por ejemplo, cuántos dedos necesitaron. Esto sin pensar en el problema como una posible interpretación de la sustracción.

Pero la estrategia de sobreconteo se dificulta para este problema por ejemplo:*"En la campaña de reciclado de aluminio canjean 1250 latitas por una computadora para la escuela. Ya juntamos 763 latitas. ¿Cuántas latitas nos faltan para tener las necesarias para una computadora?"* En este caso, calcular cuánto hay que agregar a 763 para llegar a 1250 es posible, pero es un procedimiento bastante costoso.

Este tipo de problema obliga a organizar la enseñanza para que los alumnos aprendan un nuevo sentido de la resta: es la operación útil para **medir la distancia** entre dos números. Ante cada problema conviene que los alumnos decidan si es más cómodo calcular el complemento o hacer la resta, pero que elijan entre estas opciones significa que saben que ambas los son.[17]

Finalmente, en el tercer enunciado H se comparan dos estados actuales (47 y 13) y la pregunta ¿cuántas más...? no puede interpretarse ni como diferencia ni como complemento, sino justamente como lo que llamamos **comparación** entre dos números. Esta otra forma de pensar la sustracción les trae a los alumnos y las alumnas aún mayores problemas que las anteriores y son más frecuentes las soluciones erróneas (puesto que se apoyan en la pregunta ¿cuánto más...?), o las soluciones correctas pero poco efectivas o económicas como el sobreconteo.

De las afirmaciones anteriores no hay que concluir que no se deba plantear en la clase este tipo de problemas. Por el contrario, para que los alumnos y las alumnas se apropien del concepto de sustracción, tienen que enfrentarse con el obstáculo de sus diversas interpretaciones. Pero es importante saber que encontraremos diferentes niveles de dificultad ante las varias interpretaciones de esta operación.

VARIABLES DIDÁCTICAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN[18]

Como acabamos de ver, desde la perspectiva del campo conceptual, cada **esquema** representa una variable a tener en cuenta. Además, es posible utilizar como variable didáctica **el lugar de la incógnita** en la estructura del problema (Ef, Ei o Tr) y el hecho de que exista un **desarrollo temporal,** un cambio cronológico con respecto al tiempo real, lo cual obliga a reconstruir la situación. Por otra parte, los problemas que contienen **"palabras clave",** como

[17] Ejemplo extraído del Prediseño Curricular para EGB de la Ciudad de Buenos Aires, 1999, pág. 307.
[18] Esta es una síntesis elaborada a partir del texto de Claudia Broitman (1999), *"Cambian los problemas, cambian los procedimientos de resolución"*, en "Las Operaciones en primer ciclo" (Capítulo 2), Ediciones Novedades Educativas, Bs. As., y de fragmentos del Desarrollo Curricular *Los niños, los maestros y los números (*1996), Cecilia Parra e Irma Saiz, Municipalidad de la Ciudad de Buenos Aires (pág. 49 en adelante)

cuánto más o *ganó* o *perdió,* pero que se resuelven mediante la operación contraria, conllevan una complejidad a tener en cuenta. Existen, además de éstas, otras variables didácticas que se pueden utilizar en general en todos los problemas:

Los números en juego: según a qué conjunto numérico pertenecen los datos, al tamaño de los números y a su "redondez" (que pueden facilitar o no el uso de estrategias de resolución)

Los tipos de magnitudes: pueden ser discretas o continuas. Si son discretas se pueden contar y representar la situación más fácilmente. En cambio las continuas (que se utilizan para medir) son más difíciles de representar (¿cómo representar días?, ¿el de hoy se cuenta?)

El orden de presentación de las informaciones: si hay una pregunta explícita o hay un "lugar para llenar", dónde está la pregunta, etc. Por ejemplo:
"Ana tenía una caja de varios alfajores. Regaló 8. Se quedó con 10. La caja tenía ... alfajores."
"Calculá cuántos alfajores tenía Ana si le regaló a tu hermana 8 y le quedaron 10"

Las formas de presentación del "enunciado" del problema: el lenguaje natural, diagramas o esquemas, tablas, por medio de dibujo.

El tipo de realidad a que se hace referencia: no es necesario considerar como interés de los alumnos a su vida cotidiana, ya que de este modo se dejan afuera de la enseñanza problemas como *"¿Cuántos números hay entre el 26 y el 95?"*
Además, los temas concretos tienen a veces el riesgo de las interpretaciones infantiles (con caballos, no pueden montar solos o es peligroso; con gallinas y huevos, hay que dejar un huevo)

La pertinencia de la información:
- Incluir informaciones no necesarias para su resolución, de modo que la selección de los datos es parte de la tarea: "*Analía recibió para su cumpleaños $18 de regalo. Su tía le dio un billete de $10, un billete de $5 y 3 monedas de $1. Ella quiere comprarse un juego para 4 jugadores de $13. ¿Cuánto le sobra?*" o "*Luz tiene 7 años. Su mamá le compró 15 figuritas. Durante el recreo, ganó 8 más. ¿Cuántas tiene ahora?*"
- Problemas donde faltan datos: "*Juan tenía autitos. Su mamá le compró 5 más. ¿Cuántos tiene ahora?*"
- Problemas con datos contradictorios: "*Lucas tenía 15 bolitas. Dice que en el primer recreo perdió 10 y en el segundo recreo perdió 6. ¿Puede ser?*"
- Problemas con muchas soluciones, una única solución o sin solución: "*María tiene billetes de $ 20, $ 10, $ 5 y $ 2. ¿Cómo puede hacer para pagar $34, $7 y $3?*"

La tarea del docente resulta de gran importancia. No se trata de que anticipe que los problemas poseen datos de más o datos en contradicción o que subraye antes las palabras claves, sino que sostenga el debate, el diálogo, la discusión buscando en el grupo argumentos que del tipo: *"el problema de los autitos de carrera no se puede resolver porque no se sabe cuántos autitos tenía antes"; "en el problema de las figuritas, el número 7 no se usa para resolver el problema"; "no puede ser que Lucas perdiera 10 y luego 6 bolitas porque tenía menos"; "hay muchas maneras de armar $34, una sola manera de armar $7y no se puede armar $ 3 con estos billetes, nos falta una moneda".*

La gran mayoría de estas variables didácticas apuntan a trabajar un contenido que generalmente es desatendido en la escuela: **el tratamiento de la información.**

¿Qué dificultades debe prever el maestro?[19]

Cada vez que un alumno resuelve un problema clásico se ve enfrentado a tratar información a un nivel de complejidad variable según el problema a tratar y según su forma.

Los maestros saben bien que ante todo tiene que haber "comprendido" el enunciado. Este trabajo no es previo sino que forma parte intrínseca de la resolución de un problema.

Muchas veces se adjudica la dificultad a una falta de comprensión lectora. Sabemos que el aprendizaje en este nivel (primer ciclo) tiene un carácter global y que existen manifiestas vinculaciones en los desempeños en distintas áreas. Sin embargo consideramos que el trabajo sobre la información y la comprensión del enunciado tienen que ser asumidos en matemática, no como pre-requisitos sino como tareas específicas y constitutivas del quehacer matemático.

---

[19] Recomendamos la relectura del apartado *¿Cuál es la situación actual?,* en el texto *Resolución de problemas* (pág. 9 de este módulo), donde se describen los "principios" que caracterizan la representación de los alumnos acerca de los problemas.

Existe una tendencia en la escuela primaria, particularmente en los primeros grados a "aseptizar" los problemas, a evitar toda ambigüedad y a tratar de "facilitar" la resolución. Creemos, por el contrario, que desde primer grado, se debe permitir y desarrollar un real trabajo sobre los enunciados. Haber "comprendido" el enunciado es haber dado significado a cada una de las informaciones y haberlas organizado para poder utilizarlas.

Dependiendo del objetivo que nos plantearemos, en ciertos momentos trabajaremos con problemas "simples", pero en otros momentos podemos proponer trabajos sobre situaciones que favorezcan otros niveles de análisis, por ejemplo, si tiene una, varias o ninguna solución, si la información es suficiente para resolver el problema, si es contradictoria, etc.

Para mostrar alguna de las posibilidades vamos a presentar un grupo de problemas que se pueden trabajar en primer grado:

1) Lucas tenía bombones, se comió 3 y le quedan 15. ¿Podés decir cuántos bombones tenía Lucas?
2) Laura tenía bombones, primero se comió 3 y después 2. ¿Podés decir cuántos le quedan?
3) Ana Inés tenía 12 bombones. Comió muchos y no le queda ninguno. ¿Podés decir cuántos comió?
4) Tomás tenía 20 bombones, se comió 2 y después 3. ¿Cuántos bombones le quedan?
5) Andrés tenía 16 bombones, ahora tiene 9. ¿Podés decir cuántos comió?
6) Luciana tenía 10 bombones, ella dice que comió 6 a la mañana y 6 a la tarde. ¿Puede ser?

Estos problemas pueden ser analizados desde la perspectiva de la representación que los alumnos suelen tener de lo que es un problema y cómo se resuelve. Es posible también anticipar los distintos modos de resolución que pueden emprender los niños. Para desencadenar los debates entre los niños sobre estos aspectos es necesario prever formas de organización de la clase que promuevan los intercambios. En las actividades propuestas hay momentos de trabajo en los equipos y entre los equipos, así como momentos de trabajo colectivo y momentos individuales.

Por múltiples factores, las prácticas de enseñanza habituales tienden a no hacerse cargo explícitamente de desarrollar en los alumnos las **capacidades metodológicas** que, como hemos dicho, están comprometidas en la actividad de resolución de problemas.

En esta propuesta buscamos poner en juego algunos de estos aspectos:
- incluir a la actividad de formulación de preguntas como inherente al quehacer matemático
- establecer el significado de los números en el contexto del problema
- distinguir la información disponible de la que es posible obtener
- juzgar el valor de la información que se obtiene
- analizar la pertinencia de las relaciones entre preguntas y cálculos.

Se propone un trabajo a partir de enunciados con múltiples datos y consiste esencialmente en formular preguntas, plantear cálculos y buscar cuál es la pregunta que intenta responder. Luego se analizan las preguntas en función del carácter de la información que se obtiene al responderlas y se determinan las restricciones con las que se trabajará.

Frente a un documento (una imagen, un calendario, un menú) o un enunciado el trabajo del alumno puede consistir en obtener y elegir informaciones pertinentes sin tener que efectuar transformaciones sobre los datos: se trata simplemente de buscar y formular informaciones o preguntas apropiadas.

Así, por ejemplo, ante una imagen del exterior de un circo, se puede proponer a los alumnos de primer grado que, por grupos, piensen preguntas que se pueden contestar observando la imagen. Al principio les cuesta distinguir afirmaciones de preguntas. Incluso confunden preguntas y exclamaciones. Pese a esto la maestra va registrando las "preguntas" propuestas y luego se trata de responderlas sirviéndose únicamente de la imagen, explicando por qué se puede o no responderlas. Esta será la oportunidad de comenzar a distinguir enunciados que corresponden a preguntas y los que no. El trabajo termina por la búsqueda colectiva de otras preguntas que todavía se podrían plantear a raíz de la imagen.

Otra actividad puede ser planteada sobre las preguntas propuestas: la maestra puede seleccionar algunas de ellas y pedir que las respondan. Puede centrarse, en principio, en aquellas preguntas que tienen relación con lo que se presenta en la imagen pero que no pueden recibir respuesta precisa. Por ejemplo: "¿En el circo hay mago?" (no se observa en la imagen), "¿dónde queda el circo?", etc. Cuando los alumnos explican lo que pasa, les puede pedir que vean con qué otras preguntas pasa eso. Han formado una "clase" de preguntas: las que no se pueden contestar con esos datos. Están inmersos en una actividad de clasificación de preguntas. Otras clases posibles, formuladas en lenguaje de los niños, son: "las que alcanza con mirar", "las que hay que contar para saber", etc.

En el curso del trabajo se pueden distinguir las preguntas que se pueden contestar y las que no. Dentro de las que se pueden contestar hay otra distinción importante por hacer: aquellas en las que se obtiene nueva información. El objetivo de la tarea es el de producir y analizar preguntas

Apuntamos a que los alumnos tomen conciencia de que en una situación problema, las respuestas a las preguntas no son siempre inmediatas, ni se pueden leer directamente: para algunas preguntas, la respuesta debe ser deducida lógicamente o "aritméticamente" del enunciado. Al construir ellos mismos las preguntas, los alumnos podrán progresivamente aprender a hacer distinciones entre distintos tipos de preguntas: aquellas para las cuales el documento no permite responder con certeza, aquellas para las cuales la respuesta figura explícitamente en el documento y aquellas cuyas respuestas pueden ser deducidas a partir de informaciones contenidas en el documento.